

CAPÍTULO 3

FUNCIONES DE MÁS DE 90 GRADOS

3.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Los valores de las funciones trigonométricas solamente existen para ángulos comprendidos entre 0 y 90 grados, por eso las tablas trigonométricas solamente traen valores en ese intervalo. No existen tablas para ángulos mayores de 90 grados.

Sin embargo, eso no significa que no se puedan obtener, por ejemplo, el seno de 123 grados, o el coseno de 265, o la tangente de 349. Lo que sucede es que el valor de una función trigonométrica mayor de 90 grados corresponde a un valor de los que están entre 0 y 90, o lo que es lo mismo, los valores comprendidos en las tablas entre 0 y 90 grados se repiten cada vez en cada cuadrante.

Así, el valor del seno de 135 es $\text{sen } 135 = 0.707106781$, que es el mismo que el seno de 45, lo que puede comprobar fácilmente el alumno con su calculadora, es decir, el valor del seno de 45 se repitió en el seno de 135. Cuando solamente existían tablas y no calculadoras, para obtener el valor del seno de 135 se buscaba en las tablas el seno de 45 por ser su equivalente.

Hay que tomar en cuenta que todos los ángulos se miden a partir del eje x positivo, avanzando en el sentido de los cuadrantes, es decir, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Encontrar el valor que le corresponde a cada función trigonométrica mayor de 90 grados respecto de un ángulo agudo (entre 0 y 90 grados) que está en tablas, es el tema de estudio de las funciones

mayores de 90 grados. Recordar que se le llama *ángulo obtuso* al mayor de 90° y menor que 180°; se le llama *ángulo cóncavo* al mayor de 180° y menor de 360° .

Reducir una función trigonométrica de más de 90° significa encontrar su función equivalente entre cero y noventa grados, algo así como “reducir la función desde un ángulo obtuso o cóncavo a un ángulo agudo”. En el caso anterior del seno de 135, reducirlo significa encontrar, por medio de ciertas reglas, que su valor equivale al seno de 45.

La regla de equivalencia para ángulos mayores de 90 grados es muy simple: La función trigonométrica para un ángulo de más de 90° equivale a la función del ángulo agudo que se forma en el cuadrante correspondiente.

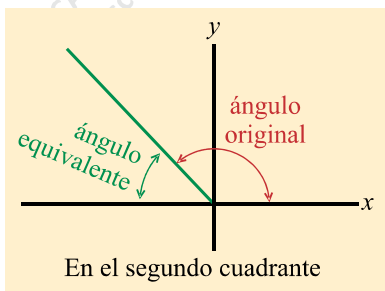


figura 3.1a

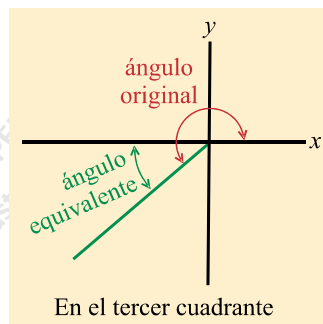


figura 3.1b

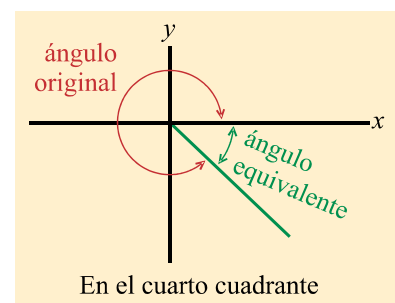


figura 3.1c

Por otra parte, con la calculadora puede comprobarse que si el seno de 225 es

$$\text{sen } 225 = - 0.707106781$$

numéricamente es el mismo que el seno de 45, solamente que cambiado de signo. Esto hace ver que las funciones trigonométricas de más de 90 grados, además de corresponder su valor a una función que esté entre 0 y 90 grados, algunas son positivas y otras negativas.

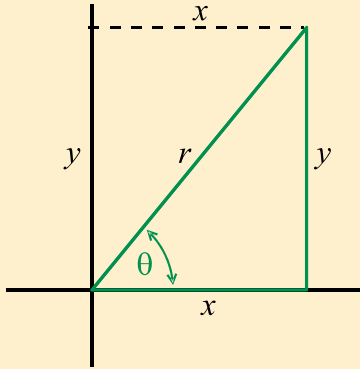
EL PROCESO DE REDUCCIÓN CONSTA DE 2 PASOS:

- * El signo de la función;
- * La función equivalente entre 0° y 90°.

3.2 SIGNOS DE LAS FUNCIONES

Cada función trigonométrica, dependiendo del cuadrante en el que estén, tiene un signo, ya sea positivo o negativo.

Se parte de las definiciones de las funciones trigonométricas para ángulos agudos, que son (ver tabla de la página 42):

$\text{seno} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$	 <p>figura 3.2</p>
$\text{coseno} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{cos } \theta = \frac{x}{r}$	
$\text{tangente} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\text{tan } \theta = \frac{y}{x}$	
$\text{cotangente} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	$\text{cot } \theta = \frac{x}{y}$	
$\text{secante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\text{sec } \theta = \frac{r}{x}$	
$\text{cosecante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$\text{csc } \theta = \frac{r}{y}$	

SEGUNDO CUADRANTE

Conforme a la figura 3.3, se ve que en el segundo cuadrante x es negativa y y positiva (r siempre es positiva), de manera que aplicando las definiciones anteriores se pueden deducir los signos que les corresponden a cada una de las funciones trigonométricas, de lo que se obtiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{+y}{+r} = +$$

$$\tan \theta = \frac{+y}{-x} = -$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{+r}{-x} = -$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{+r} = -$$

$$\cot \theta = \frac{-x}{+y} = -$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{+r}{+y} = +$$

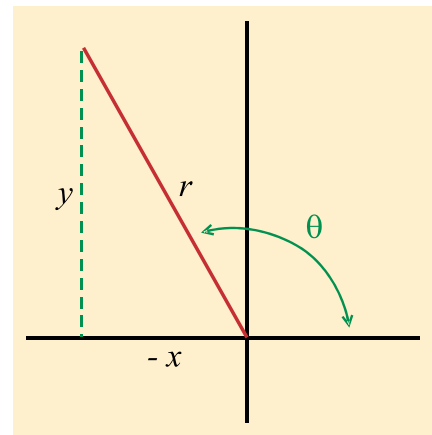


figura 3.3

TERCER CUADRANTE

En la figura 3.4 puede observarse que en el tercer cuadrante x es negativa y y negativa (r siempre es positiva), de manera que aplicando las definiciones fundamentales se pueden obtener los signos de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{-y}{+r} = -$$

$$\tan \theta = \frac{-y}{-x} = +$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{+r}{-x} = -$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{+r} = -$$

$$\cot \theta = \frac{-x}{-y} = +$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{+r}{-y} = -$$

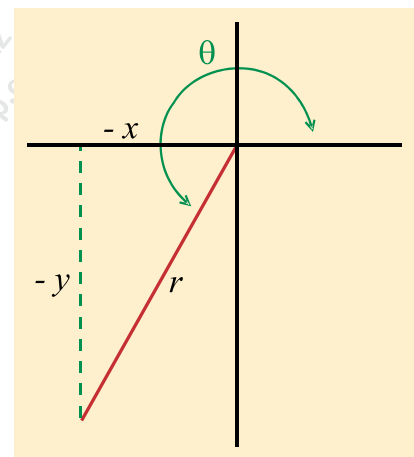


figura 3.4

CUARTO CUADRANTE

Conforme a la figura 3.5, se ve que en el cuarto cuadrante x es positiva y y negativa (r siempre es positiva), de manera que aplicando las definiciones anteriores se pueden obtener los signos de la siguiente forma:

$$\text{sen } \theta = \frac{-y}{+r} = -$$

$$\text{tan } \theta = \frac{-y}{+x} = -$$

$$\text{sec } \theta = \frac{+r}{+x} = +$$

$$\text{cos } \theta = \frac{+x}{+r} = +$$

$$\text{cot } \theta = \frac{+x}{-y} = -$$

$$\text{csc } \theta = \frac{+r}{-y} = -$$

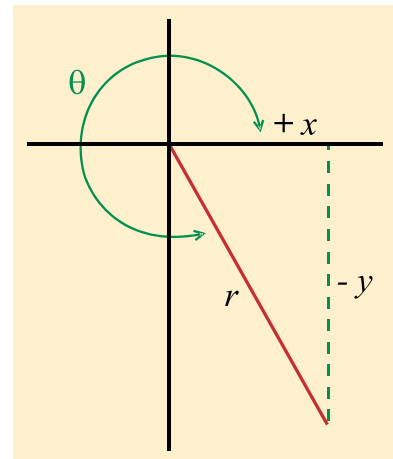


figura 3.5

Resumiendo, los signos de las seis funciones trigonométricas en cada cuadrante se muestran en la siguiente tabla, en donde puede apreciarse que se cumple una especie de ley de la herradura, es decir que el signo del *seno* es el mismo que el signo de la *cosecante* en cualquier cuadrante; el signo del *coseno* es el mismo que el signo de la *secante* en cualquier cuadrante y el signo de la *tangente* es el mismo que el signo de la *cotangente* en cualquier cuadrante:

FUNCIÓN	CUADRANTE			
	1°	2°	3°	4°
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-
secante	+	-	-	+
cosecante	+	+	-	-

tienen el mismo signo en cualquier cuadrante (parece herradura)

3.3 FUNCIÓN EQUIVALENTE

Conviene recordar dos cosas: una, que *reducir una función trigonométrica* de más de 90° significa encontrar su función equivalente entre cero y noventa grados. La otra, que el proceso de reducción consta de dos pasos: hallar el signo de la función y luego *la función equivalente*.

EL PROCESO DE REDUCCIÓN CONSISTE EN:

- a) Asignar el signo de la función, de acuerdo al cuadrante en que esté (ver la tabla anterior), y
- b) tomar la función equivalente con el correspondiente ángulo reducido, es decir, con el correspondiente ángulo agudo.

Es importante distinguir entre la función equivalente y el valor numérico de la función. Por ejemplo, si $\text{sen } 135 = \text{sen } 45 = 0.707106781$, se dice que para el $\text{sen } 135$ su función equivalente es $\text{sen } 45$, en cambio el valor numérico de $\text{sen } 135$ es 0.707106781 . Cuando se hace una reducción, lo que importa solamente es la función equivalente, no el valor numérico de la función.

Ese ángulo equivalente reducido, o sea el equivalente entre 0° y 90° , puede estar tomado hacia el eje x o hacia el eje y . Cuando se hace hacia el eje x se dice que la reducción se hace por medio del eje x ; de la misma forma, si el ángulo equivalente reducido que viene en tablas, se toma hacia el eje y , se dice que la reducción se hace por medio del eje y . En este curso solamente se estudiarán las reducciones por el eje x por ser las más usuales.

3.3.1 REDUCCIONES POR MEDIO DEL EJE X

EN EL PRIMER CUADRANTE

Las funciones trigonométricas en el primer cuadrante no se reducen pues ya son, por sí solas, menores de 90° ($0 \leq \theta \leq 90$).

EN EL SEGUNDO CUADRANTE

Inicialmente se tienen los dos ángulos citados, como se muestra en la figura 3.6, es decir, el ángulo obtuso (de más de 90 grados) que es el original y un ángulo agudo (menor de 90 grados) que es el ángulo reducido correspondiente, o al que se debe reducir.

De manera que las fórmulas respectivas, o sea las funciones reducidas para ángulos comprendidos entre 90 y 180 grados, donde θ representa el ángulo obtuso original, son:

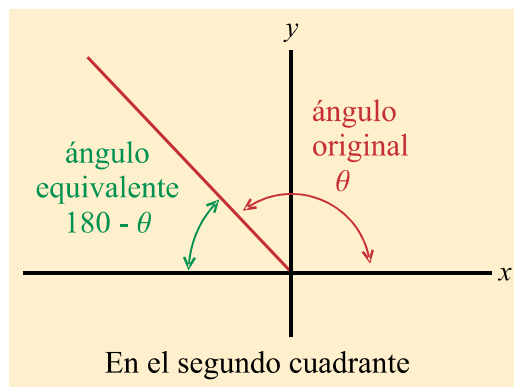


figura 3.6

$$\text{sen } \theta = + \text{sen } (180 - \theta)$$

$$\text{cos } \theta = - \text{cos } (180 - \theta)$$

$$\text{tan } \theta = - \text{tan } (180 - \theta)$$

$$\text{cot } \theta = - \text{cot } (180 - \theta)$$

$$\text{sec } \theta = - \text{sec } (180 - \theta)$$

$$\text{csc } \theta = + \text{csc } (180 - \theta)$$

- Ejemplos:
- 1) $\text{sen } 114 = + \text{sen } (180 - 114) = + \text{sen } 66$
 - 2) $\text{cos } 133 = - \text{cos } (180 - 133) = - \text{cos } 47$
 - 3) $\text{tan } 98 = - \text{tan } (180 - 98) = - \text{tan } 82$
 - 4) $\text{sec } 169 = - \text{sec } (180 - 169) = - \text{sec } 11$
 - 5) $\text{csc } 136 = - \text{csc } (180 - 136) = + \text{csc } 44$

EJERCICIO 3.1

Reducir las siguientes funciones trigonométricas escribiendo el procedimiento paso por paso.

NOTA: En todos estos ejercicios de reducción el alumno debe desarrollar el procedimiento de reducción como en los ejemplos mostrados, pero **no debe anotar el valor numérico**, ya que eso no es lo que interesa, porque, entre otras cosas, ese valor lo puede simplemente copiar de una calculadora. Por ejemplo, para $\text{sen } 125$ no interesa en este ejercicio que valga 0.819152, sino el proceso de reducción que es: $\text{sen } 125 = \text{sen } (180 - 125) = \text{sen } 55$.

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $\text{sen } 105$ | 5) $\text{cos } 119$ | 9) $\text{tan } 100$ | 13) $\text{cot } 102$ |
| 2) $\text{sen } 174$ | 6) $\text{cos } 159$ | 10) $\text{tan } 108$ | 14) $\text{cot } 154$ |
| 3) $\text{sen } 144$ | 7) $\text{cos } 171$ | 11) $\text{tan } 129$ | 15) $\text{cot } 122$ |
| 4) $\text{sen } 121$ | 8) $\text{cos } 139$ | 12) $\text{tan } 147$ | 16) $\text{cot } 172$ |
| 17) $\text{sec } 119$ | 21) $\text{csc } 117$ | 25) $\text{csc } 124$ | 29) $\text{tan } 139$ |
| 18) $\text{sec } 109$ | 22) $\text{csc } 131$ | 26) $\text{cos } 120$ | 30) $\text{sec } 166$ |
| 19) $\text{sec } 171$ | 23) $\text{csc } 176$ | 27) $\text{sen } 128$ | 31) $\text{csc } 160$ |
| 20) $\text{sec } 130$ | 24) $\text{csc } 143$ | 28) $\text{cot } 133$ | 32) $\text{cot } 122$ |

EN EL TERCER CUADRANTE

Inicialmente se tienen los dos ángulos citados, como se muestra en la figura 3.7, es decir, el ángulo obtuso (de más de 90 grados) que es el original y un ángulo agudo (menor de 90 grados) que es el ángulo reducido correspondiente, o al que se debe reducir.

De manera que las fórmulas respectivas, o sea las funciones reducidas para ángulos comprendidos entre 180 y 270 grados, donde θ representa el ángulo obtuso original, son:

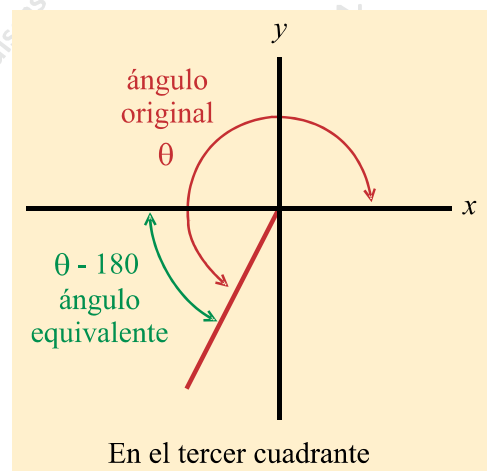


figura 3.7

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= -\operatorname{sen}(\theta - 180) \\ \operatorname{cos} \theta &= -\operatorname{cos}(\theta - 180) \\ \operatorname{tan} \theta &= +\operatorname{tan}(\theta - 180) \\ \operatorname{cot} \theta &= +\operatorname{cot}(\theta - 180) \\ \operatorname{sec} \theta &= -\operatorname{sec}(\theta - 180) \\ \operatorname{csc} \theta &= -\operatorname{csc}(\theta - 180) \end{aligned}$$

Ejemplos:

- 1) $\operatorname{sen} 214 = -\operatorname{sen}(214 - 180) = -\operatorname{sen} 34$
- 2) $\operatorname{cos} 233 = -\operatorname{cos}(233 - 180) = -\operatorname{cos} 53$
- 3) $\operatorname{tan} 198 = +\operatorname{tan}(198 - 180) = +\operatorname{tan} 18$
- 4) $\operatorname{sec} 269 = -\operatorname{sec}(269 - 180) = -\operatorname{sec} 89$
- 5) $\operatorname{csc} 183 = -\operatorname{csc}(183 - 180) = +\operatorname{csc} 3$

EJERCICIO 3.2

Reducir las siguientes funciones trigonométricas, escribiendo el procedimiento paso por paso.

NOTA: En todos estos ejercicios de reducción el alumno debe desarrollar el procedimiento de reducción como en los ejemplos mostrados, pero **no debe anotar el valor numérico**, ya que eso no es lo que interesa, porque, entre otras cosas, ese valor lo puede simplemente copiar de una calculadora. Por ejemplo, para $\operatorname{sen} 228$ no interesa en este ejercicio que valga -0.743144825 , sino el proceso de reducción que es: $\operatorname{sen} 228 = -\operatorname{sen}(228 - 180) = -\operatorname{sen} 48$.

- | | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\operatorname{sen} 205$ | 5) $\operatorname{cos} 219$ | 9) $\operatorname{tan} 190$ | 13) $\operatorname{cot} 193$ |
| 2) $\operatorname{sen} 194$ | 6) $\operatorname{cos} 199$ | 10) $\operatorname{tan} 208$ | 14) $\operatorname{cot} 205$ |
| 3) $\operatorname{sen} 244$ | 7) $\operatorname{cos} 261$ | 11) $\operatorname{tan} 244$ | 15) $\operatorname{cot} 259$ |
| 4) $\operatorname{sen} 251$ | 8) $\operatorname{cos} 239$ | 12) $\operatorname{tan} 217$ | 16) $\operatorname{cot} 245$ |
| 17) $\operatorname{sec} 219$ | 21) $\operatorname{csc} 197$ | 25) $\operatorname{csc} 224$ | 29) $\operatorname{sec} 261$ |
| 18) $\operatorname{sec} 199$ | 22) $\operatorname{csc} 191$ | 26) $\operatorname{sen} 200$ | 30) $\operatorname{cos} 230$ |
| 19) $\operatorname{sec} 231$ | 23) $\operatorname{csc} 256$ | 27) $\operatorname{tan} 188$ | 31) $\operatorname{cot} 251$ |
| 20) $\operatorname{sec} 239$ | 24) $\operatorname{csc} 183$ | 28) $\operatorname{tan} 233$ | 32) $\operatorname{csc} 258$ |

EN EL CUARTO CUADRANTE

Inicialmente se tienen los dos ángulos citados, como se muestra en la figura 3.8, es decir, el ángulo obtuso original (de más de 90 grados) y un ángulo agudo (menor de 90 grados) que es el ángulo reducido correspondiente, o al que se debe reducir.

De manera que las fórmulas respectivas, o sea las funciones reducidas para ángulos comprendidos entre 270 y 360 grados, donde θ representa el ángulo obtuso original, son:

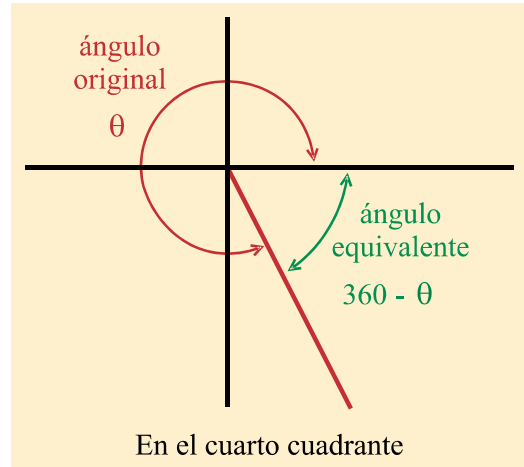


figura 3.8

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \theta &= - \text{sen } (360 - \theta) \\
 \text{cos } \theta &= + \text{cos } (360 - \theta) \\
 \text{tan } \theta &= - \text{tan } (360 - \theta) \\
 \text{cot } \theta &= - \text{cot } (360 - \theta) \\
 \text{sec } \theta &= + \text{sec } (360 - \theta) \\
 \text{csc } \theta &= - \text{csc } (360 - \theta)
 \end{aligned}$$

Recuérdese que θ representa al ángulo obtuso original de más de 90 grados.

- Ejemplos:
- 1) $\text{sen } 294 = - \text{sen } (360 - 294) = - \text{sen } 66$
 - 2) $\text{cos } 283 = + \text{cos } (360 - 283) = + \text{cos } 77$
 - 3) $\text{tan } 298 = - \text{tan } (360 - 298) = - \text{tan } 62$
 - 4) $\text{cot } 316 = - \text{cot } (360 - 316) = - \text{cot } 44$
 - 5) $\text{sec } 330 = + \text{sec } (360 - 330) = + \text{sec } 30$

EJERCICIO 3.3

Reducir las siguientes funciones trigonométricas, escribiendo el procedimiento paso por paso.

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $\text{sen } 275$ | 5) $\text{cos } 319$ | 9) $\text{tan } 290$ | 13) $\text{cot } 272$ |
| 2) $\text{sen } 294$ | 6) $\text{cos } 299$ | 10) $\text{tan } 308$ | 14) $\text{cot } 299$ |
| 3) $\text{sen } 344$ | 7) $\text{cos } 321$ | 11) $\text{tan } 344$ | 15) $\text{cot } 306$ |
| 4) $\text{sen } 351$ | 8) $\text{cos } 315$ | 12) $\text{tan } 317$ | 16) $\text{cot } 344$ |
| 17) $\text{sec } 319$ | 21) $\text{csc } 297$ | 25) $\text{csc } 324$ | 29) $\text{cot } 359$ |
| 18) $\text{sec } 359$ | 22) $\text{csc } 281$ | 26) $\text{tan } 300$ | 30) $\text{sec } 333$ |
| 19) $\text{sec } 310$ | 23) $\text{csc } 276$ | 27) $\text{sen } 348$ | 31) $\text{sec } 302$ |
| 20) $\text{sec } 289$ | 24) $\text{csc } 313$ | 28) $\text{cos } 333$ | 32) $\text{sen } 322$ |

EJERCICIO 3.4: (generales)

Reducir las siguientes funciones:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $\text{sen } 105$ | 5) $\text{cos } 119$ | 9) $\text{tan } 100$ | 13) $\text{sen } 105$ |
| 2) $\text{sen } 194$ | 6) $\text{cos } 199$ | 10) $\text{tan } 208$ | 14) $\text{tan } 243$ |
| 3) $\text{sen } 244$ | 7) $\text{cos } 271$ | 11) $\text{tan } 299$ | 15) $\text{csc } 201$ |
| 4) $\text{sen } 321$ | 8) $\text{cos } 309$ | 12) $\text{tan } 347$ | 16) $\text{cos } 339$ |
| 17) $\text{cot } 119$ | 21) $\text{sec } 117$ | 25) $\text{csc } 124$ | 29) $\text{cot } 97$ |
| 18) $\text{cot } 199$ | 22) $\text{sec } 191$ | 26) $\text{csc } 200$ | 30) $\text{sec } 184$ |
| 19) $\text{cot } 271$ | 23) $\text{sec } 276$ | 27) $\text{csc } 288$ | 31) $\text{tan } 275$ |
| 20) $\text{cot } 309$ | 24) $\text{sec } 343$ | 28) $\text{csc } 333$ | 32) $\text{cot } 347$ |
| 33) $\text{sen } 123$ | 37) $\text{cos } 128$ | 41) $\text{tan } 105$ | 45) $\text{cos } 100$ |
| 34) $\text{sen } 199$ | 38) $\text{cos } 194$ | 42) $\text{tan } 238$ | 46) $\text{sec } 200$ |
| 35) $\text{sen } 249$ | 39) $\text{cos } 275$ | 43) $\text{tan } 288$ | 47) $\text{cot } 300$ |
| 36) $\text{sen } 332$ | 40) $\text{cos } 308$ | 44) $\text{tan } 340$ | 48) $\text{csc } 316$ |
| 49) $\text{cot } 117$ | 53) $\text{sec } 118$ | 57) $\text{csc } 127$ | 61) $\text{tan } 35$ |
| 50) $\text{cot } 196$ | 54) $\text{sec } 193$ | 58) $\text{csc } 230$ | 62) $\text{sen } 61$ |
| 51) $\text{cot } 276$ | 55) $\text{sec } 277$ | 59) $\text{csc } 291$ | 63) $\text{cos } 77$ |
| 52) $\text{cot } 329$ | 56) $\text{sec } 348$ | 60) $\text{csc } 330$ | 64) $\text{cot } 12$ |

3.4 ÁNGULOS MAYORES DE 360 GRADOS

También es posible sacar las funciones trigonométricas para ángulos mayores de 360 grados, o sea, de más de una vuelta. Simplemente a dicho ángulo se le restan el número de vueltas completas que le quepan y al resto se le aplica lo analizado anteriormente.

Es muy fácil entender por qué deben quitarse vueltas enteras para obtener un ángulo menor de 360 grados cuya función sea equivalente. Supóngase que se tiene inicialmente una polea montada sobre una base, como lo muestra la figura 3.9, (posición inicial) en la que se ha puesto una marca tanto en la polea como en la base, haciéndose coincidir para que sirva de referencia de la posición inicial de dicha polea.

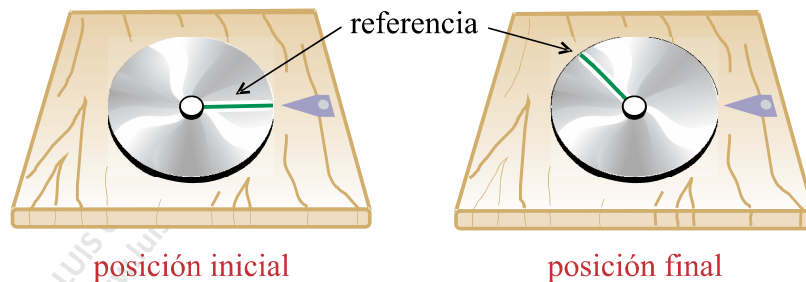


figura 3.9

En un momento dado se le da un impulso a la polea haciéndola girar libremente, de manera que al detenerse queda en la posición final mostrada en la misma figura 3.9. La cuestión a resolver es: ¿Para dónde y cómo giró la polea?

Existen cuatro posibilidades, las cuales se muestran en el siguiente cuadro sinóptico:

OPCIONES	{	1) Girar en sentido contrario de las manecillas del reloj	{ 1.1) menos de una vuelta 1.2) más de una vuelta
		2) Girar en sentido de las manecillas del reloj	{ 2.1) menos de una vuelta 2.2) más de una vuelta

Si se hace girar en el sentido contrario a las manecillas del reloj, o lo que es lo mismo, en el sentido de avance de los cuadrantes, el ángulo se considera positivo; si se hace girar en el sentido de las manecillas del reloj, o sea en sentido contrario al avance de los cuadrantes, el ángulo se considera negativo.

En otras palabras, un ángulo es positivo si a partir del eje x^+ se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj, o bien en el sentido del avance de los cuadrantes. Un ángulo es negativo si a partir del eje x^+ se mide en el sentido de las manecillas del reloj, o bien en sentido contrario al avance de los cuadrantes.

La figura 3.11 muestra los casos en que la polea haya girado positivamente, es decir, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, o bien en el sentido del avance de los cuadrantes.

Pero se dé la opción 1.1 (menos de una vuelta) o la opción 1.2 (más de una vuelta), el resultado final fue el mismo, es decir, la marca en la polea quedó donde mismo en una u otra opción. Por esa razón, los dos ángulos se consideran equivalentes.

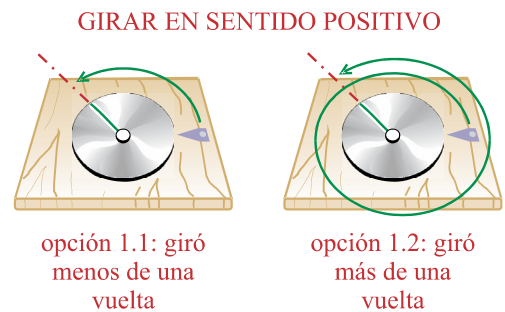


figura 3.11

La figura 3.12 muestra el caso de que la polea haya girado negativamente, es decir en el sentido de las manecillas del reloj o al inverso del avance de los cuadrantes.

Pero, igualmente, se dé la opción 2.1 (menos de una vuelta) o la opción 2.2 (más de una vuelta), el resultado final fue el mismo, es decir, la marca en la polea quedó donde mismo en una u otra opción. Por esa razón, los dos ángulos se consideran equivalentes.

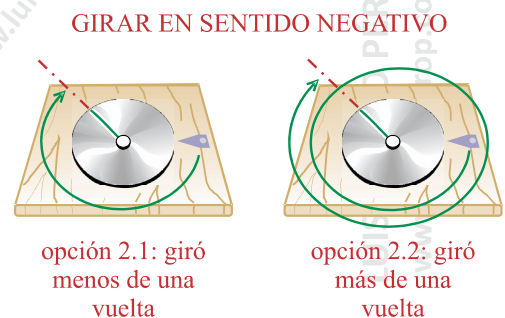


figura 3.12

De tal manera que, por ejemplo, el ángulo de 375° es equivalente al ángulo de 15° , pues si a 375° se le quita una vuelta entera, o sea 360° , quedan los 15° .

En general, para saber cuántas vueltas enteras «le caben» a cualquier ángulo mayor de 360 grados, debe dividirse el ángulo entre 360. Del cociente obtenido, la parte entera indica el número de vueltas completas que le caben.

Por ejemplo, para reducir el ángulo de 1749 grados, se divide 1749 entre 360, lo cual da 4.8583333. La parte entera de este cociente, el 4, indica que a 1749 le «caben» cuatro vueltas completas. Esas cuatro vueltas son

$$4 \times 360 = 1440^\circ$$

de manera que se obtiene:

$$\triangle 1749 = \triangle (1749 - 1440) = \triangle 309$$

PARA REDUCIR UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA DE MÁS DE 360 GRADOS:

- 1) Se reduce el ángulo de más de 360 grados a su equivalente de menos de 360 grados.
- 2) Se reduce la función trigonométrica, conforme se analizó anteriormente.

Ejemplo 1: Reducir la función $\text{sen } 987$.

<p>Solución: $\text{sen } 987 = \text{sen } (987 - 720)$</p> <p>$= \text{sen } 267$</p> <p>$= -\text{sen } (267 - 180)$</p> <p>$= -\text{sen } 87$</p>	<p>➡ Se reduce el ángulo original quitándole dos vueltas enteras al restarle 720.</p> <p>➡ Es el ángulo equivalente al original habiéndole quitado las dos vueltas enteras.</p> <p>➡ Se reduce la función trigonométrica con el criterio de la página 64 para el 3^{er} cuadrante.</p> <p>➡ Reducción final.</p>
---	--

O sea que:

$$\text{sen } 987 = -\text{sen } 87$$

Ejemplo 2: Reducir la función $\tan 1505$.

Solución: $\tan 1505 = \tan (1505 - 1440)$ \Rightarrow Se reduce el ángulo original quitándole cuatro vueltas enteras.

$= \tan 65$ \Rightarrow Es el ángulo equivalente al original habiéndole quitado las cuatro vueltas enteras. Como ya es un ángulo menor de 90° , ya no se reduce.

O sea que:

$$\tan 1505 = \tan 65$$

EJERCICIO 3.5

Reducir las siguientes funciones trigonométricas de ángulos mayores de 360°

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $\text{sen } 498$ | 8) $\text{cos } 559$ | 15) $\text{tan } 620$ | 22) $\text{csc } 388$ |
| 2) $\text{cot } 455$ | 9) $\text{sec } 452$ | 16) $\text{csc } 809$ | 23) $\text{sen } 1002$ |
| 3) $\text{sen } 608$ | 10) $\text{cos } 771$ | 17) $\text{tan } 833$ | 24) $\text{cot } 773$ |
| 4) $\text{cot } 784$ | 11) $\text{sec } 1073$ | 18) $\text{csc } 5507$ | 25) $\text{tan } 608$ |
| 5) $\text{sen } 1074$ | 12) $\text{cos } 2335$ | 19) $\text{tan } 3096$ | 26) $\text{csc } 2001$ |
| 6) $\text{cot } 1222$ | 13) $\text{sec } 2083$ | 20) $\text{cos } 1730$ | 27) $\text{cos } 1554$ |
| 7) $\text{sen } 1977$ | 14) $\text{cos } 2446$ | 21) $\text{tan } 3007$ | 28) $\text{sec } 888$ |

3.5 ÁNGULOS NEGATIVOS

Entonces, como se mencionó en la página 68, un ángulo es *positivo* si a partir del eje x^+ se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj, o lo que es lo mismo en el sentido del avance de los cuadrantes. Un ángulo es *negativo* si a partir del eje x^+ se mide en el sentido de las manecillas del reloj, o lo que es lo mismo en sentido contrario al avance de los cuadrantes.

De manera que dos ángulos son exactamente iguales, o son el mismo, si sus valores absolutos suman una vuelta completa, es decir, 360° . Por ejemplo,

$$\triangle 127 = \triangle (-233)$$

Ver figura 3.13, solamente que el de $+127$ está medido en el sentido del avance de los cuadrantes (contrario a las manecillas del reloj), mientras que el de (-233) está medido en sentido contrario al avance de los cuadrantes, o lo que es lo mismo, en el sentido del avance de las manecillas del reloj.

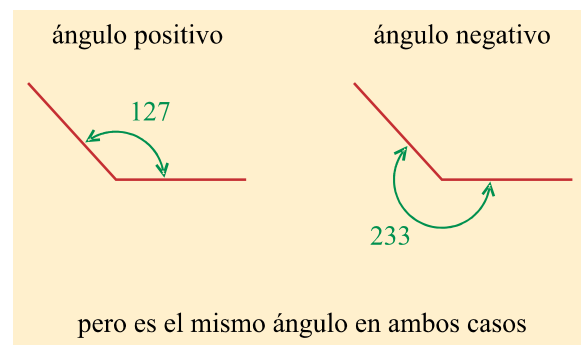


figura 3.13

El ángulo, en ambos casos, es exactamente el mismo, lo único que cambió fue la manera de medirlo. En otras palabras, para decir que un ángulo se midió «por arriba» se emplea el signo $+$ y para decir que se midió «por abajo» se emplea el signo $-$.

De tal forma que:

Para convertir un ángulo positivo en negativo, simplemente se le resta 360, e inversamente, para convertir un ángulo negativo en positivo, simplemente se le suma 360.

Ejemplos:

- 1) $\triangle 244 = \triangle (244 - 360) = \triangle (-116)$
- 2) $\triangle (-108) = \triangle (-108 + 360) = \triangle 252$
- 3) $\triangle 67 = \triangle (67 - 360) = \triangle (-293)$
- 4) $\triangle (-12) = \triangle (-12 + 360) = \triangle 348$
- 5) $\triangle 164 = \triangle (164 - 360) = \triangle (-196)$
- 6) $\triangle (-101) = \triangle (-101 + 360) = \triangle 259$

EJERCICIO 3.6

Convertir los siguientes ángulos positivos en ángulos negativos:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $\triangle 46$ | 2) $\triangle 241$ | 3) $\triangle 144$ | 4) $\triangle 154$ |
| 5) $\triangle 309$ | 6) $\triangle 63$ | 7) $\triangle 260$ | 8) $\triangle 300$ |
| 9) $\triangle 176$ | 10) $\triangle 12$ | 11) $\triangle 200$ | 12) $\triangle 7$ |
| 13) $\triangle 324$ | 14) $\triangle 193$ | 15) $\triangle 88$ | 16) $\triangle 71$ |
| 17) $\triangle 106$ | 18) $\triangle 51$ | 19) $\triangle 6$ | 20) $\triangle 351$ |
| 21) $\triangle 145$ | 22) $\triangle 52$ | 23) $\triangle 200$ | 24) $\triangle 4$ |
| 25) $\triangle 334$ | 26) $\triangle 139$ | 27) $\triangle 40$ | 28) $\triangle 19$ |
| 29) $\triangle 316$ | 30) $\triangle 55$ | 31) $\triangle 9$ | 32) $\triangle 322$ |

Convertir los ángulos negativos en ángulos positivos (los ángulos negativos deben ir entre paréntesis):

- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 33) $\triangle (-66)$ | 34) $\triangle (-257)$ | 35) $\triangle (-114)$ | 36) $\triangle (-159)$ |
| 37) $\triangle (-355)$ | 38) $\triangle (-50)$ | 39) $\triangle (-286)$ | 40) $\triangle (-307)$ |
| 41) $\triangle (-172)$ | 42) $\triangle (-14)$ | 43) $\triangle (-201)$ | 44) $\triangle (-6)$ |
| 45) $\triangle (-328)$ | 46) $\triangle (-173)$ | 47) $\triangle (-81)$ | 48) $\triangle (-17)$ |
| 49) $\triangle (-186)$ | 50) $\triangle (-53)$ | 51) $\triangle (-7)$ | 52) $\triangle (-354)$ |
| 53) $\triangle (-177)$ | 54) $\triangle (-11)$ | 55) $\triangle (-255)$ | 56) $\triangle (-5)$ |
| 57) $\triangle (-303)$ | 58) $\triangle (-105)$ | 59) $\triangle (-77)$ | 60) $\triangle (-80)$ |
| 61) $\triangle (-199)$ | 62) $\triangle (-50)$ | 63) $\triangle (-37)$ | 64) $\triangle (-325)$ |

3.6 ÁNGULOS NEGATIVOS DE MÁS DE UNA VUELTA

Se puede presentar el caso de una función trigonométrica de un ángulo negativo de más de una vuelta, o sea mayores de 360° . Entonces lo primero que debe hacerse es quitarle el número de vueltas enteras que le quepan.

PARA QUITARLE VUELTAS ENTERAS A UN ÁNGULO NEGATIVO:

- 1) Se le suma 360 ó múltiplos de 360.
- 2) Todo ángulo negativo debe escribirse entre paréntesis.

Ejemplos:

- 1) $\text{sen}(-455) = \text{sen}(-455 + 360) = \text{sen}(-95)$
- 2) $\text{cos}(-813) = \text{cos}(-813 + 720) = \text{cos}(-93)$
- 3) $\text{tan}(-1413) = \text{tan}(-1413 + 1080) = \text{tan}(-333)$
- 4) $\text{sec}(-1803) = \text{sec}(-1803 + 1800) = \text{sec}(-3)$
- 5) $\text{csc}(-2183) = \text{csc}(-2183 + 2160) = \text{csc}(-23)$

Para reducir entonces una función trigonométrica de un ángulo negativo de más de una vuelta, o sea buscar su equivalente que corresponda a una función comprendida entre 0° y 90° , conforme a todo lo anteriormente ya explicado, se realizan los siguientes pasos:

PARA REDUCIR UN ÁNGULO NEGATIVO DE MÁS DE 360 GRADOS:

- 1) Se le quitan todas las vueltas enteras posibles.
- 2) Se convierte en su correspondiente ángulo positivo.

Ejemplo 1: Reducir:

$$\begin{aligned}
 \cot(-952) &= \cot(-952 + 720) && \Rightarrow \text{se le quitan vueltas enteras.} \\
 &= \cot(-232) && \Rightarrow \text{ángulo negativo de menos de una vuelta.} \\
 &= \cot(-232 + 360) && \Rightarrow \text{se transforma en ángulo positivo} \\
 &= \cot 128 && \Rightarrow \text{ángulo positivo correspondiente} \\
 &= -\cot 52 && \Rightarrow \text{reducción final}
 \end{aligned}$$

O sea que

$$\cot(-952) = -\cot 52$$

EJERCICIO 3.7

Reducir las siguientes funciones trigonométricas de ángulos negativos:

- | | | | |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $\text{sen}(-298)$ | 8) $\text{cos}(-559)$ | 15) $\text{tan}(-620)$ | 22) $\text{csc}(-388)$ |
| 2) $\text{cot}(-55)$ | 9) $\text{sec}(-42)$ | 16) $\text{csc}(-109)$ | 23) $\text{sen}(-1002)$ |
| 3) $\text{sen}(-208)$ | 10) $\text{cos}(-771)$ | 17) $\text{tan}(-833)$ | 24) $\text{cot}(-773)$ |
| 4) $\text{cot}(-284)$ | 11) $\text{sec}(-173)$ | 18) $\text{csc}(-5507)$ | 25) $\text{tan}(-608)$ |
| 5) $\text{sen}(-104)$ | 12) $\text{cos}(-235)$ | 19) $\text{tan}(-296)$ | 26) $\text{csc}(-2001)$ |
| 6) $\text{cot}(-122)$ | 13) $\text{sec}(-2083)$ | 20) $\text{cos}(-1730)$ | 27) $\text{cos}(-154)$ |
| 7) $\text{sen}(-197)$ | 14) $\text{cos}(-2446)$ | 21) $\text{tan}(-3007)$ | 28) $\text{sec}(-888)$ |

3.7 VALORES EN LOS EJES

Hasta aquí se tiene un análisis completo de cómo obtener el valor de la función trigonométrica de cualquier ángulo. Solamente hace falta analizar los ángulos que están sobre los ejes. Porque se dijo ya cómo reducir cualquier función que corresponda a un ángulo que esté entre 90° y 180° , pero nada se dijo de cuando es exactamente 90° ó 180° ; se dijo también cómo reducir cualquier función que corresponda a un ángulo que esté entre 180° y 270° , pero nada se dijo de cuando es exactamente 180° ó 270° .

En todos los casos, debe deducirse cuánto vale x y cuánto vale ye , observando en la figura correspondiente que una de las dos se hace cero. Por su parte, r siempre es positiva, ya que los signos positivos o negativos solamente tienen sentido para denotar una medida horizontal o una medida vertical y, además, r siempre va a coincidir o con x o con ye .

a) PARA 0°

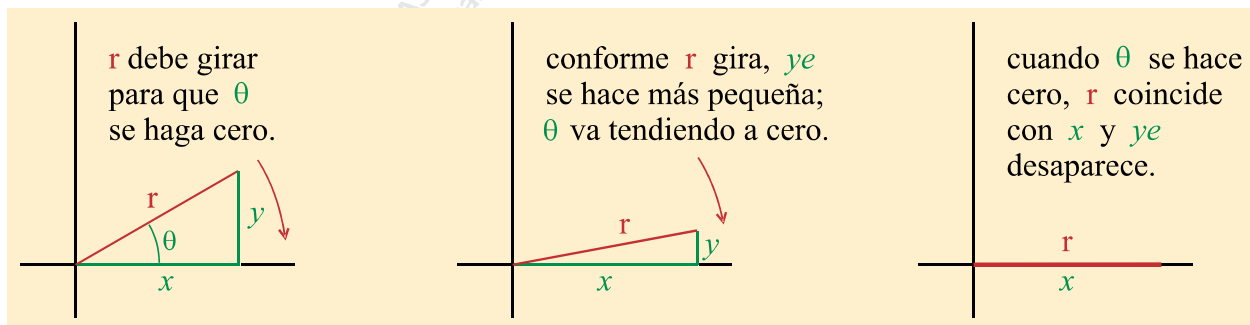


figura 3.14

De la figura 3.14 se deduce que cuando el ángulo θ se hace cero al girar r , entonces $y = 0$ y además $r = x$ (r mide lo mismo que x por lo que tiene el valor numérico de x , o sea en valor absoluto).

Se tiene entonces que

x es positiva	$(x \rightarrow +x)$
ye es cero	$(ye \rightarrow 0)$
r es igual a lo que vale x	$(r \rightarrow x)$

De manera que los valores de las seis funciones trigonométricas para 0° son:

$$\operatorname{sen} 0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\operatorname{tan} 0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\operatorname{sec} 0 = \frac{r}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\operatorname{cos} 0 = \frac{x}{r} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\operatorname{cot} 0 = \frac{x}{y} = \frac{x}{0} = \infty$$

$$\operatorname{csc} 0 = \frac{r}{y} = \frac{x}{0} = \infty$$

b) PARA 90°

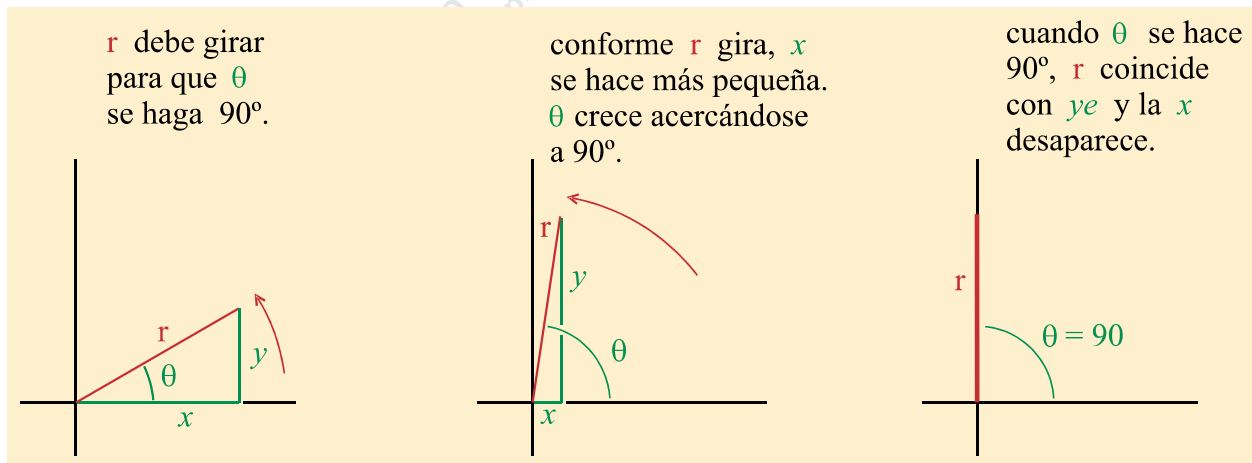


figura 3.15

De la figura 3.15 se deduce que cuando el ángulo θ se hace 90 grados al girar r , entonces $x = 0$ y además $r = y$ (r mide lo mismo que ye por lo que tiene el valor numérico de ye , pero sin signo, o sea en valor absoluto). Se tiene entonces que

x es cero	$(x \rightarrow 0)$
ye es positiva	$(ye \rightarrow ye)$
r es igual a lo que vale ye	$(r \rightarrow ye)$

De manera que los valores de las seis funciones trigonométricas para 90° son:

$$\operatorname{sen} 90 = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1$$

$$\operatorname{tan} 90 = \frac{y}{x} = \frac{y}{0} = \infty$$

$$\operatorname{sec} 90 = \frac{r}{x} = \frac{y}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cos} 90 = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\operatorname{cot} 90 = \frac{x}{y} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\operatorname{csc} 90 = \frac{r}{y} = \frac{y}{y} = 1$$

c) PARA 180°

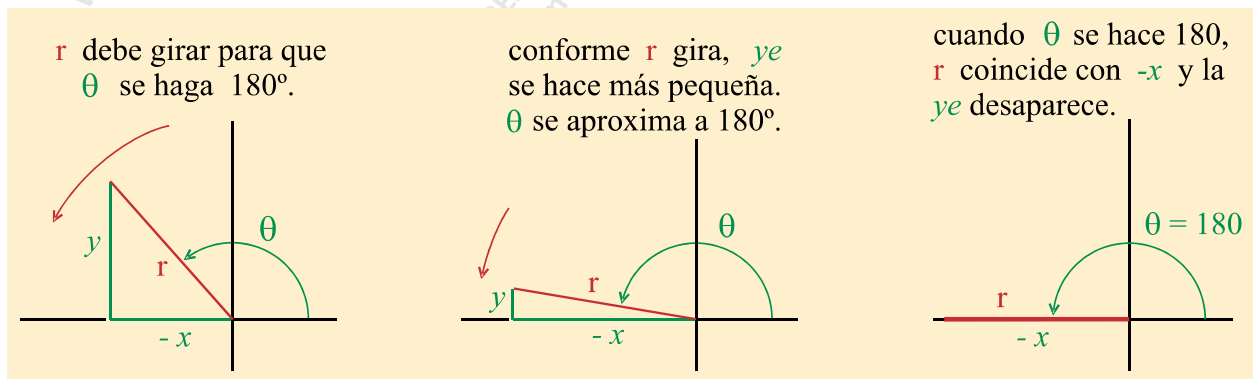


figura 3.16

De la figura 3.16 se deduce que cuando θ se hace 180 al girar r , entonces $y = 0$ y además r se empalma con x (r mide lo mismo que x por lo que tiene el valor numérico de x , pero sin signo, o sea en valor absoluto). En este caso hay que agregar que el valor real de x , como está hacia la izquierda, es $(-x)$.

Se tiene entonces que

x es negativa

y es cero

r es igual a lo que vale x

$(x \rightarrow -x)$

$(y \rightarrow 0)$

$(r \rightarrow x, r$ no tiene signo)

De manera que los valores de las seis funciones trigonométricas para 180° son:

$$\operatorname{sen} 180 = \frac{y}{r} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\operatorname{tan} 180 = \frac{y}{-x} = \frac{0}{-x} = 0$$

$$\operatorname{sec} 180 = \frac{r}{-x} = \frac{x}{-x} = -1$$

$$\operatorname{cos} 180 = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$\operatorname{cot} 180 = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{0} = -\infty$$

$$\operatorname{csc} 180 = \frac{r}{y} = \frac{x}{0} = \infty$$

d) PARA 270°

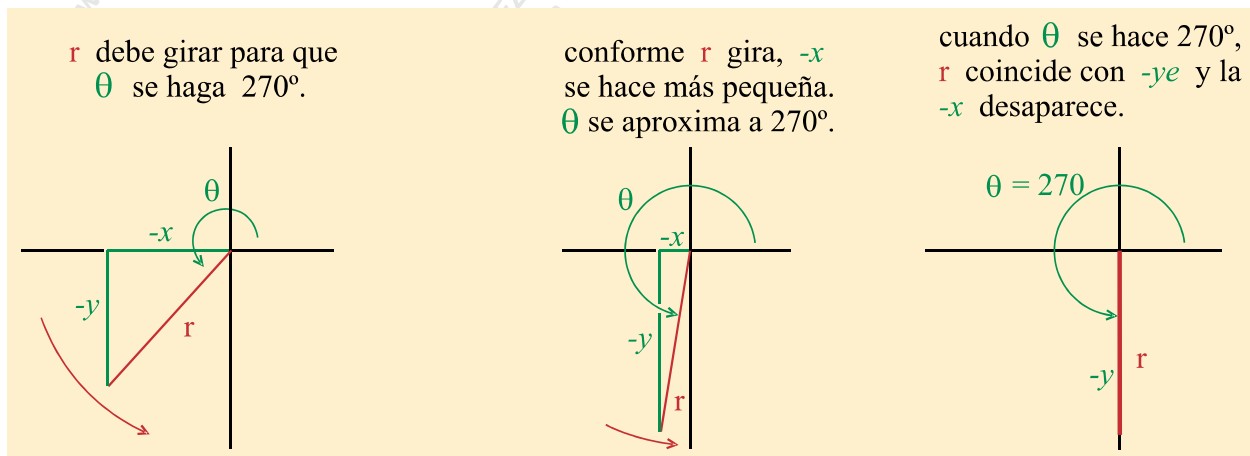


figura 3.17

De la figura 3.17 se deduce que cuando el ángulo θ se hace 270 al girar r , entonces $x = 0$ y además r mide lo mismo que ye , o sea $r = x$ por lo que tienen el mismo valor numérico, pero r sin signo, o sea en valor absoluto. En este caso hay que agregar que el valor real de ye , como está hacia abajo, es $(-ye)$. Se tiene entonces que

x es cero

ye es negativa

r es igual a lo que vale ye

$(x \rightarrow 0)$

$(ye \rightarrow -ye)$

$(r \rightarrow ye ; r \text{ no tiene signo})$

De manera que los valores de las seis funciones trigonométricas para 270° son:

$$\operatorname{sen} 270 = \frac{-y}{r} = \frac{-y}{y} = -1$$

$$\operatorname{tan} 270 = \frac{-y}{x} = \frac{-y}{0} = -\infty$$

$$\operatorname{sec} 270 = \frac{r}{x} = \frac{y}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cos} 270 = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\operatorname{cot} 270 = \frac{x}{-y} = \frac{0}{-y} = 0$$

$$\operatorname{csc} 270 = \frac{r}{-y} = \frac{y}{-y} = -1$$

En síntesis, los valores en los ejes son los siguientes:

	0	90	180	270
<i>sen</i>	0	1	0	-1
<i>cos</i>	1	0	-1	0
<i>tan</i>	0	∞	0	$-\infty$
<i>cot</i>	∞	0	$-\infty$	0
<i>sec</i>	1	∞	-1	
<i>csc</i>		1		-1